

ARGUMENTOS DE ESCALA NA DESCRIÇÃO DE COMPORTAMENTO CAÓTICO.

Talita Natália Ferrari, Edson Denis Leonel. Física - Engenharia Ambiental - Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação – Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus Rio Claro.

Nos últimos anos, a teoria de sistemas dinâmicos tem sido abordada e aplicada nos mais diversos ramos da ciência. O comportamento dinâmico de muitos sistemas físicos pode ser caracterizado, em particular sua evolução temporal, pelos conceitos matemáticos desenvolvidos na teoria de sistemas dinâmicos não lineares discretos [1-7]. A partir de ferramentas e propriedades dinâmicas e estatísticas podemos extrair resultados numéricos e analíticos relevantes para a caracterização de sistemas físicos.

A descrição completa da evolução temporal de um sistema físico se dá, em geral, pela resolução de equações diferenciais, geralmente não lineares, e pela análise qualitativa e quantitativa de suas soluções em função de condições iniciais e de parâmetros externos. Tais equações diferenciais regem a evolução do conjunto de variáveis que descrevem um dado sistema. A abordagem via teoria dos sistemas dinâmicos discretos e do estudo da evolução temporal dos sistemas físico pressupõe que esta evolução pode ser descrita por um mapeamento discreto envolvendo um conjunto de variáveis relevantes, denominado estado, que caracterizem completamente o sistema. Dá-se o nome de espaço de fases ao conjunto de todos os estados acessíveis. Ao evoluir, a partir de um estado inicial, o sistema passa por pontos do espaço de fases; ao conjunto assim percorrido denomina-se órbita. Assim, o espaço de fases é também o conjunto de todas as órbitas possíveis.

A estrutura do espaço de fases caracteriza portanto os comportamentos dinâmicos possíveis do sistema. De uma maneira geral esta estrutura pode se apresentar de várias maneiras, em graus distintos de organização e contendo hierarquias de arranjos. Movimentos regulares (periódicos ou quase-periódicos) estão associados a estruturas organizadas e movimentos irregulares a estruturas complexas.

O objeto de estudo, consiste em considerar o problema do movimento livre de uma partícula (clássica) confinada a uma região fechada do espaço e que sofre colisões completamente elásticas com a fronteira. Tais problemas são chamados de problemas do bilhar. Estes sistemas podem ser discutidos e tratados a partir de poços infinitos de potencial. Dessa forma, os bilhares podem ser vistos como exemplos facilmente discretizáveis de sistemas Hamiltonianos. O sistema dinâmico discreto associado é conservativo e pode apresentar regimes dinâmicos como integrabilidade, não integrabilidade e caos. Quando o potencial que descreve a região fechada é dependente do tempo ou, de maneira equivalente, quando a posição da fronteira é dependente do tempo (bilhares pulsantes), temos exemplos simples de sistemas Hamiltonianos dependentes do tempo que também são colocados facilmente na forma de um sistema dinâmico discreto. Grande parte destes sistemas apresentam um espaço de fases do tipo misto no sentido de que ilhas do tipo Kolmogorov-Arnol'd-Moser (KAM) são geralmente envoltas por mares de caos enquanto que curvas invariantes do tipo *spanning* separam diferentes regiões do espaço de fase. Especial atenção tem sido aplicada no comportamento caótico destes sistemas [4], assim como a possibilidade de caracterizá-los usando teoria de escala [3]. Além do mais, alguns destes sistemas podem apresentar comportamentos descritos por lei de potência [5,7] com mesmos expoentes, os quais podem ser uma clara evidência de que estes sistemas podem ser enquadrados em uma mesma classe de universalidade.

A metodologia do trabalho consistiu basicamente na leitura de artigos científicos que foram obtidos junto à revistas eletrônicas e que estão disponíveis no site da CAPES em periódicos on-line. Como método de trabalho, foram confeccionadas rotinas numéricas em código FORTRAN para a simulação e obtenção dos resultados, e para a obtenção dos gráficos foi utilizado o programa XMGR.

O estudo considerou uma partícula clássica inserida em uma caixa de potencial infinito que contém uma barreira oscilatória (fig. 1).

Nessa caixa consideramos V_0 como uma constante, dada a altura da barreira potencial estática. V_1 é a amplitude de oscilação na região e os parâmetros l , b e L são, respectivamente, a largura do poço I, a barreira e o poço II. A dinâmica da partícula interagindo com a barreira potencial pode ser

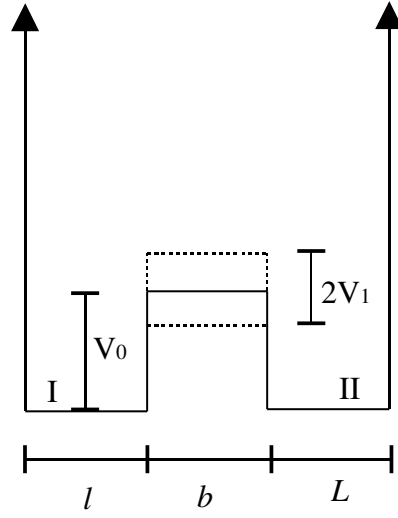


Fig.1. Poço de potencial infinito.

descrita por um mapeamento bidimensional (T), dada a energia total da partícula e o tempo no qual colide com um potencial infinito.

$$T_A: \begin{cases} e_{n+1} = e_n, \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 4\pi M / \sqrt{e_{n+1}} \bmod(2\pi), \end{cases}$$

$$T_B: \begin{cases} e_{n+1} = e_n + r[-\sin(\Delta\phi_a) + \sin(\Delta\phi_b) \\ \quad - \sin(\Delta\phi_c) + \sin(\Delta\phi_d)], \\ \phi_{n+1} = \Delta\phi_d + 2\pi M / \sqrt{e_{n+1}} \bmod(2\pi), \end{cases}$$

A iteração de T para os parâmetros $r=0.5$, $b/l=1.0$, $L/l=0.2$ e $M=4.7$ nos dá um espaço de fases do tipo misto (fig. 2). No regime de baixas energias observa-se curvas invariantes do tipo *spanning* separando mares de caos que por sua vez estão circundados de ilhas do tipo KAM. Para valores intermediários de energia, observa-se uma região de pequena caoticidade, limitada por duas curvas invariantes do tipo *spanning*. Nosso foco de maior atenção será no regime de baixa energia.

Iremos caracterizar o comportamento do desvio da energia média a qual denotamos por rugosidade (w), e vamos considerar o caso de um sistema simétrico e ajustar $r=0.1$, mas comportamento similar pode ser observado com outros valores de r .

Dadas as séries temporais, é fácil avaliar a média e as energias quadradas médias, definidas como:

$$\bar{e}(N, M) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_n, \quad \bar{e}^2(N, M) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_n^2.$$

Através delas, nós podemos definir a rugosidade como:

$$\omega(N, M) \equiv \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \sqrt{\bar{e}_j^2(N, M) - \bar{e}_j(N, M)^2},$$

Onde usamos B com diferentes condições iniciais. A média em B condições iniciais é usada a fim de tornar suave a evolução da rugosidade. A figura 3 mostra uma evolução da rugosidade. Nela

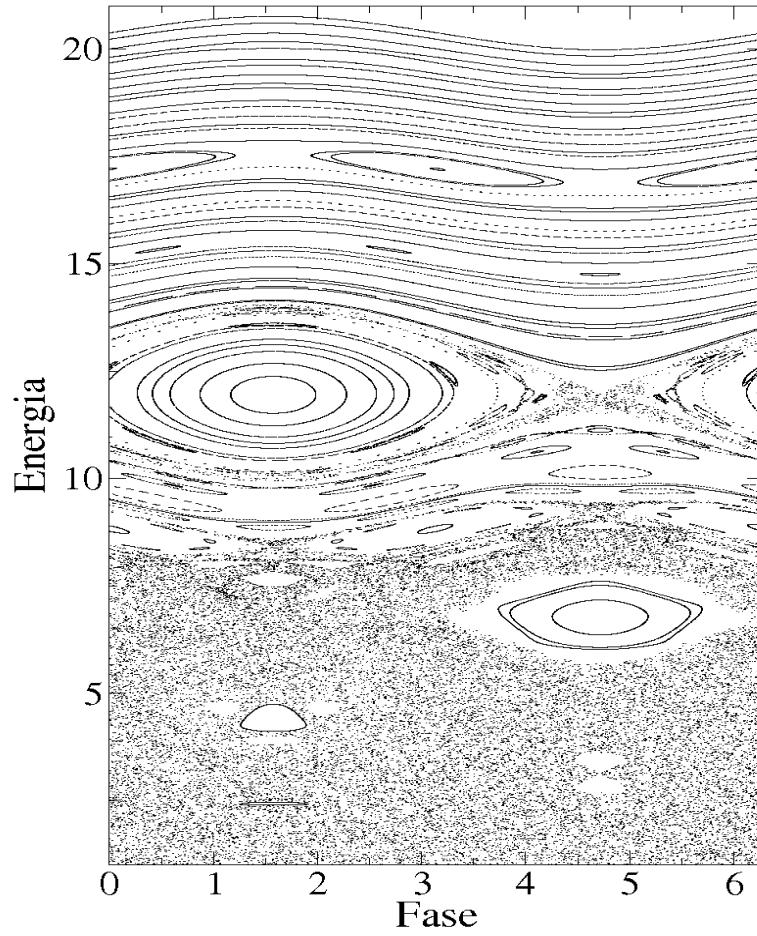


Fig.2. Espaço de fase do tipo misto.

observamos dois tipos de comportamento em função do número de iterações. Depois de um breve transiente inicial, a rugosidade cresce de acordo com a lei de potência, mas alcança eventualmente um regime de saturação para um número grande de iterações. A mudança no comportamento é caracterizada por um típico número N_x de iterações. Esta saturação da curva de rugosidade é uma consequência da amplitude limitada das séries temporais. Sabe-se bem que a amplitude depende da posição da primeira curva invariante, desde que, no modelo determinístico, o mar caótico esteja limitado pela curva tipo *spanning*. Para a série de parâmetros de controle estudada, um efeito do aumento de M implica em elevar a posição da primeira curva *spanning*. Assim podemos começar a estudar a escala de rugosidade, supondo a seguir:

- (i) Após o breve transiente inicial, a rugosidade cresce em função do número de iterações de acordo com

$$\omega(N, M) \propto N^\beta. \quad (1)$$

Este crescimento pode ser observado na região I da fig. 3. β é conhecido como coeficiente de crescimento. A equação (1) é válida para $N \ll N_x$.

- (ii) Enquanto o número de iterações aumenta, a rugosidade alcança a saturação, como observa-se na região II da fig. 3. O comportamento da rugosidade dentro do regime de saturação segue a equação,

$$\omega_{sat}(N, M) \propto M^\alpha, \quad (2)$$

onde α é o expoente de rugosidade. A equação (2) é válida apenas para $N \gg N_x$.

(iii) O número N_x de iterações é dado por:

$$N_x(M) \propto M^Z.$$

onde Z é chamado de parâmetro dinâmico.

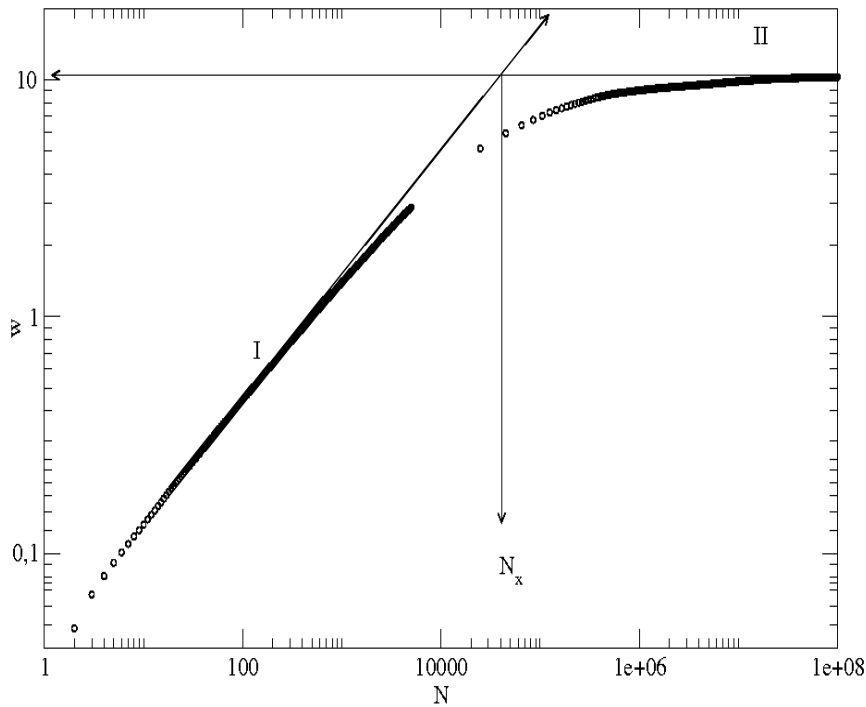


Fig 3. Comportamento da rugosidade

Os expoentes críticos que descrevem a dinâmica foram obtidos como sendo: $\alpha=0,670(1)$, $\beta=0,5$ e $Z=1,331(6)$.

Com esses dados podemos obter um colapso das curvas de rugosidade em uma única curva universal. Portanto nossos resultados confirmam que o sistema dinâmico considerado apresenta uma transição de fases do tipo Integrável – Não Integrável.

Referências Bibliográficas

- [1]Hilborn, R. C.; Chaos and Nonlinear Dynamics (Oxford University Press, 1994)
- [2] Leonel, E. D.; McClintock, P. V. E.; Silva, J. K. L. Phys. Rev. Lett., 93, 014101, (2004).
- [3]Leonel, E. D.; Silva, J. K. L.; Kamphorst, S. O. Physica A., 331, 435-447, (2004).
- [4]Leonel, E. D.; Silva, J. K. L. Physica A., 323, 181-196, (2003).
- [5]Lichtenberg, A. J.; Lieberman, M. A. Regular and Chaotic Dynamics. Appl. Math. Sci. 38, Springer- Verlag, New York (1992).
- [6]Mateos, J. L.; José, J. V. Physica A, 257, 434-438, (1998).
- [7]Schmidt, G.; Wang, B.W. Phys. Rev. A, 32, 2994, (1985).

Bolsa: FAPESP